Sesión preparatoria para Olimpiadas Matemáticas (12/02/2021)

Bernabé Iturralde Jara

Teoría de números

Se suponen conocidos los principios de inducción (fuerte y débil), el principio del palomar, el principio de buena ordenación, divisibilidad, factorización y congruencias.

Teorema de Euler-Fermat

Definimos la función ϕ de Euler:

$$\phi(n) = \prod_{i=1}^{k} (p_i - 1) * p_i^{e_i - 1}$$

Siendo $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$ la factorización de n en producto de potencias de primos.

Sean $a,\ n$ coprimos;

$$a^{\phi(n)} \equiv 1\ (mod\ n)$$

Problemas:

1. Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tales que $a^6 + 2b^6 = 4c^6$, probar que $a = b = c = 0$.

2. Demuestra que el producto de n enteros consecutivos es divisible por $n!$.

3. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$, tales que $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ es un entero. Demuestra que $\frac{a^2+b^2}{1+ab}$ es un cuadrado perfecto.

4. Sea $n \in \mathbb{Z}$, demuestra que:

a) $n^3 - n$ es divisible entre 6.

b) $n^5 - 5n^3 + 4n$ es divisible entre 120.

5. Sean $a_0, a_1, \dots, a_{3030} \in \mathbb{N}$ tales que:

$$2a_{n+2} = a_{n+1} + 4a_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, 0 \le n \le 3028$$

Demostrar que al menos uno de los a_i es divisible por 2^{2020}.

6. Llámese bueno al entero n si se pudiere escribir de la forma

$$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

En donde $a_1, a_2, \dots, a_k$ son enteros positivos, no necesariamente distintos y satisfaciendo:

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_k} = 1$$

Dada la información de que todo entero desde el 33 hasta el 73 es bueno, demuéstrese que todo entero ≥ 33 es bueno.

7. Sea A un subconjunto de 19 elementos del conjunto $C = \{3k-2,\ k \in \mathbb{N},\ k \leq 34\} = \{1,4,\dots,100\}$, demostrar que existen dos elementos de A que suman 104.

8. Demuestra que cualquier entero mayor que 1 de la forma $11\dots1$ no es un cuadrado perfecto.

9. a) Sea $a \in \mathbb{Z},\ a \neq 1$, demuestra que:

$$1 + a + \cdots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

b) Sean $x, y \in \mathbb{N} \cup \{0\}, x \neq y$, prueba que $x - y$ divide a $x^n - y^n$.

c) Si n es impar, demuestra que $x + y$ divide a $x^n + y^n$.

d) Demuestra que, para todo k impar, $1 + 2 + \cdots + n$ divide a $1^k + 2^k + \cdots + n^k$.

10. Sea $n \in \mathbb{N}$, demuestra que si $2n + 1$ es un cuadrado perfecto, entonces $n + 1$ es suma de dos cuadrados perfectos consecutivos.

11. Demuestra que $221^{480} \equiv 1\ mod\ (2310)$.

12. Demuestra que el producto de cualesquiera 4 enteros consecutivos no nulos no es un cuadrado perfecto.

13. Encuentra todos los enteros positivos de la forma:

$$n = r + \frac{1}{r}\ , r \in \mathbb{Q}$$

14. Demuestra que si la última cifra de 7^n es 3, la penúltima es 4.

15. Encuentra todos los $a, b \in \mathbb{N}$ tales que existen tres enteros consecutivos para los que $p(x)$ toma un valor entero.

$$p(x) = \frac{x^5 + a}{b}$$

16. Sean $p, n \in \mathbb{N}$, tales que p es un primo menor o igual que n y $1 + np$ es un cuadrado perfecto. Probar que $n + 1$ es suma de p cuadrados perfectos.

17. Demuestra que 7 divide a $2222^{5555} + 5555^{2222}$.

Podéis encontrar más problemas similares a estos en "*Teoría elemental de los números para olimpíadas matemáticas"* (David A. Santos).